介于经典型和乘积型的奇异积分算子*

谭超强
（汕头大学理学院数学系，广东 汕头 515063）

摘　要：经典单参数奇异积分算子与多参数乘积型奇异积分算子既有联系也有区别。文中建立一套介于两者之间的奇异积分算子理论，给出该类算子的 L^p（$p>1$）有界性。其中 L^2 有界性是利用傅里叶变换与分部积分等方法得到的。一般的 L^p（$p>1$）有界性是利用经典的 Littlewood-Paley-Stein 理论和方法得到的。

关键词：基础数学；傅里叶分析；奇异积分算子
中图分类号：O174　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529-6579（2012）05-0058-05

Singular Integral Operators Between the Classical Type and the Product Type

TAN Chaoqiang
(Department of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063, China)

Abstract: A set of theory of singular integral operators is established, which can be seen as the middle class between the classical single-parameter singular integral operators and the multi-parameter product singular integral operators. The L^p ($p>1$) boundedness for these operators is obtained, where the L^2 boundedness of these operators is obtained by the method of Fourier transform and integration by part and the L^p ($p>1$) boundedness is obtained by the classical method of Littlewood-Paley-Stein theory.

Key words: foundations of mathematics; Fourier analysis; singular integral operator

由于偏微分方程和复分析等领域的研究发展，产生了一系列具有奇性的积分算子，人们需要对这些算子的性质进行探索和研究。于是在这种背景的激励下，Calderon 和 Zygmund 等人经过多年的研究，建立出一套比较完善的单参数奇异积分算子理论[1-4]，如今它已经成为调和分析领域的核心内容。这类型算子的特点是核函数满足大小条件、光滑性条件与消失矩条件，而这类算子的最重要性质之一就是 L^p 有界性（$1<p<\infty$）。

然而随着多复变函数等领域的发展，人们发现有些算子与 Calderon-Zygmund 奇异积分算子很类似，但是却不满足单参数 Calderon-Zygmund 奇异积分算子的条件。为解决这些问题，E. M. Stein 和 R. Fefferman 等人引入一套多参数乘积型的奇异积分算子理论[5-7]，很好地解决了这些问题。这套多参数理论的特点是把单参数理论中的核函数大小条件与光滑性条件同时降低，但是却加强了消失矩条件，依然能保证这类算子的 L^p 有界性（$1<p<\infty$）。

这两套理论有着本质的区别，但同时有着诸多的联系。在这两套算子理论的基础上，本文将建立另外一套介于单参数与多参数间的奇异积分算子理论，给出其 L^p 有界性。我们给出的这类算子特点是核函数比单参数的奇异积分算子的大小条件和光滑性条件要求低，但是保持消失矩条件不变。因此经典的单参数奇异积分算子就是我们这套理论的特

* 收稿日期：2012-02-20
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11026215）；高等学校博士学科点专项科研基金资助项目（20104402120002）；广东省自然科学基金资助项目（10451503101006384）
作者简介：谭超强（1980 年生），男，副教授；E-mail：cqtan@stu.edu.cn

殊情形，同时在形式上与乘积型的算子非常类似。

1　定理的提出

1.1　单参数与多参数奇异积分算子理论简介

经典的单参数 Calderon-Zygmund 奇异积分算子是一种卷积型的算子[1]，一个最特殊的例子就是 $\mathbf{R}$ 上的 Hilbert 变换，即 $Tf = \mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{x} * f\right)$。单参数 Calderon-Zygmund 奇异积分算子实质上就是 Hilbert 变换的推广。具体来讲，经典的单参数奇异积分算子理论表述如下。

1.1.1　*经典的单参数奇异积分算子理论*　假设存在常数 C，使得核 $K(x):\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 满足：

（a）大小与光滑性条件：$|\partial_x^\alpha K(x)| \leq \frac{C}{|x|^{\alpha+n}}$，对任意的 $|\alpha| \leq 1$ 成立；

（b）消失矩条件：$\left|\int_{\varepsilon<|x|<R} K(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq C$，对 $0 < \varepsilon < R$ 一致成立且当 $\varepsilon \to 0$ 时不等式左边收敛。

那么奇异积分算子 $Tf(x) = \mathrm{P.V.}\,K*f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ 可延拓为 $L^p(\mathbf{R}^n)$，$1 < p < \infty$ 上的有界线性算子。

注 1　单参数核的一个重要性质是单参数展缩不变，即对任意的 $t > 0$，$t^n K(tx)$ 一致地满足上面大小条件、光滑性条件和消失矩条件。

而多参数的乘积型奇异积分算子理论，由 E. M. Stein 和 R. Fefferman 等人建立和完善的。它的一个典型代表是 $\mathbf{R}^2$ 上的双 Hilbert 变换，即 $Tf = \mathrm{P.V.}\left(\frac{1}{xy} * f\right)$。多参数的奇异积分算子理论可以表述如下：

1.1.2　*多参数奇异积分理论*　假设存在常数 C，使得核 $K(x,y):\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 满足：

（a）大小与光滑性条件：$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leq C \frac{1}{|x|^{\alpha+m}} \frac{1}{|y|^{\beta+n}}$，对任意 $|\alpha|,|\beta| \leq 1$ 成立；

（b）消失矩条件：$\left|\int_{\varepsilon<|x|<R} \partial_y^\beta K(x,y)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{C}{|y|^{\beta+n}}$，$\left|\int_{\varepsilon<|y|<R} \partial_x^\alpha K(x,y)\,\mathrm{d}y\right| \leq \frac{C}{|x|^{\alpha+m}}$，$|\alpha|$，$|\beta| \leq 1$ 及 $\left|\int_{\substack{\varepsilon<|x|<R\\ \varepsilon<|y|<R}} K(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leq C$ 对任意的 $0 < \varepsilon < R$ 一致成立且当 $\varepsilon \to 0$ 时不等式左边收敛。

那么奇异积分算子 $Tf(x,y) = \mathrm{P.V.}\,K*f(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{|x-x'|>\varepsilon\\ |y-y'|>\varepsilon}} K(x-x',y-y')f(x',y')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$ 可延拓为 $L^p(\mathbf{R}^{m+n})$，$1 < p < \infty$ 上的有界线性算子。

注 2　多参数核的一个重要性质是多参数展缩不变，即对任意的 $t,s > 0$，$t^m s^n K(tx,sy)$ 一致地满足上面大小条件、光滑性条件和消失矩条件。

我们知道单参数理论与多参数理论虽然方法上很多相同之处，但是却有着本质的不同。为研究这两种理论之间的联系，本文将建立一套介于经典单参数与多参数乘积型的奇异积分算子理论。该理论某种程度上可看作为连结这两套理论的纽带，对它的研究将丰富了奇异积分算子理论体系，有助于我们加深对奇异积分算子的理解与认识。为了更加清楚表述我们的理论，我们只考虑 $\mathbf{R}^2$ 上这种简单的情形。下面是本文的主要定理。

1.2　主要定理

定理 1　给定 $0 < \delta < 1$，假设存在常数 C，使得核 $K(x):\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足：

（a）大小与光滑性条件：$|\partial_{x_1}^\alpha \partial_{x_2}^\beta K(x_1,x_2)| \leq C \frac{1}{|x_1|^{\alpha+1}} \frac{1}{|x_2|^{\beta+1}} \left(\frac{|x_1|}{|x_2|} + \frac{|x_2|}{|x_1|}\right)^{-\delta}$，$|\alpha|$，$|\beta| \leq 1$；

（b）消失矩条件：$\left|\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<R\\ \varepsilon<|x_2|<R}} K(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right| \leq C$ 对任意的 $0 < \varepsilon < R$ 一致成立且当 $\varepsilon \to 0$ 时，不等式左边收敛。

那么奇异积分算子 $Tf(x) = \mathrm{P.V.}\,K*f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{|x_1-y_1|>\varepsilon\\ |x_2-y_2|>\varepsilon}} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$（其中 $x = (x_1,x_2)$，$y = (y_1,y_2)$）可延拓为 $L^p(\mathbf{R}^2)$，$1 < p < \infty$ 上的有界线性算子。

注 3　（i）我们指出经典的单参数奇异积分算子包含在我们的类里面，同时形式上与多参数的乘积型奇异积分算子理论类似。

（ii）同时我们的理论更具有一般性。譬如核 $K(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x_1+x_2)}{(|x_1||x_2|)^{1/2}(|x_1|+|x_2|)}$ 满足上述定理条件，但是却不是经典的单参数的奇异积分算子。

（iii）算子 $Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\substack{|x_1-y_1|>\varepsilon\\ |x_2-y_2|>\varepsilon}} K(x-y)f(y)\,\mathrm{d}y$ 首先是定义在具有紧支集的光滑函数上，然后才延拓到一般的 $L^p(\mathbf{R}^2)$，$1 < p < \infty$ 空间上。下面定理的证明过程将说明上述极限是存在的，即算子 T 的定义是有意义的。

（iv）该类算子是单参数展缩不变的，即对任意的 $t > 0$，$t^2 K(tx,ty)$ 一致地满足上面大小条件、光滑性条件和消失矩条件。

2 主要定理的证明

首先我们给出截断算子的定义，对任意的 $0<\varepsilon<N<\infty$，定义核 $K_\varepsilon^N(x)=K(x)\chi_{\substack{\varepsilon<|x_1|<N\\ \varepsilon<|x_2|<N}}$，其中 χ 为特征函数，算子 $T_\varepsilon^N f(x)=K_\varepsilon^N * f(x)$。主要定理的证明主要步骤如下：第一步，证明算子 T_ε^N 是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上一致有界的，证明方法主要是傅里叶变换和分部积分；第二步，证明对具有紧支集的光滑函数 $f(x)$，极限 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} T_\varepsilon^N f(x)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 意义下收敛 $(1<p<\infty)$，也因此在几乎处处的意义下收敛；第三步，利用 Littlewood-Paley 理论证明算子 T 是 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 有界的 $(1<p<\infty)$。

2.1 第一步 证明算子 T_ε^N 是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 上一致有界的

因为算子 T_ε^N 是卷积型算子，因此我们只需证明其核的傅里叶变换 $\bar{K}_\varepsilon^N(\xi)=\int_{\mathbf{R}^2} K_\varepsilon^N(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$ 对 ε,N 一致有界。不失一般性，我们不妨假定 $0<\varepsilon<\frac{1}{|\xi_1|},\frac{1}{|\xi_2|}<N$。

注意到

$$\bar{K}_\varepsilon^N(\xi)=\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}\\ \varepsilon<|x_2|<\frac{1}{|\xi_2|}}} K(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+$$
$$\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}\\ \frac{1}{|\xi_2|}<|x_2|<N}} K(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+$$
$$\int_{\substack{\frac{1}{|\xi_1|}<|x_1|<N\\ \varepsilon<|x_2|<\frac{1}{|\xi_2|}}} K(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+$$
$$\int_{\substack{\frac{1}{|\xi_1|}<|x_1|<N\\ \frac{1}{|\xi_2|}<|x_2|<N}} K(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2:=$$
$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}$$

对于项 I，利用核 K 的大小条件和消失矩条件，有

$$|\mathrm{I}|\leqslant\left|\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}\\ \varepsilon<|x_2|<\frac{1}{|\xi_2|}}} K(x_1,x_2)(\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}-1)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right|+$$
$$\left|\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}\\ \varepsilon<|x_2|<\frac{1}{|\xi_2|}}} K(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right|\leqslant$$
$$C\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}\\ \varepsilon<|x_2|<\frac{1}{|\xi_2|}}}\frac{1}{|x_1|}\frac{1}{|x_2|}\left(\frac{|x_1|}{|x_2|}+\frac{|x_2|}{|x_1|}\right)^{-\delta}\cdot$$
$$(|x_1\xi_1|+|x_2\xi_2|)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2+C\leqslant C.$$

对于项 II，对变量 x_2 进行分部积分，有

$$|\mathrm{II}|\leqslant$$
$$\left|\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}\\ \frac{1}{|\xi_2|}<|x_2|<N}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\xi_2}\nabla_{x_2}K(x_1,x_2)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+x_2\xi_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right|+$$
$$4\left|\int_{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\xi_2}K(x_1,M)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(x_1\xi_1+M\xi_2)}\mathrm{d}x_1\right|:=$$
$$\mathrm{II}_1+\mathrm{II}_2$$

其中 $M=\pm\frac{1}{\xi_2}$ 或者 $\pm N$。利用核 K 大小与光滑性条件，有

$$\mathrm{II}_1\leqslant C\int_{\substack{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}\\ \frac{1}{|\xi_2|}<|x_2|<N}}\frac{1}{2\pi|\xi_2|}\frac{1}{|x_1|}\frac{1}{|x_2|^2}\cdot$$
$$\left(\frac{|x_1|}{|x_2|}+\frac{|x_2|}{|x_1|}\right)^{-\delta}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\leqslant C,$$
$$\mathrm{II}_2\leqslant C\int_{\varepsilon<|x_1|<\frac{1}{|\xi_1|}}\frac{1}{2\pi|\xi_2|}\frac{1}{|x_1|}\frac{1}{|M|}\cdot$$
$$\left(\frac{|x_1|}{|M|}+\frac{|M|}{|x_1|}\right)^{-\delta}\mathrm{d}x_1\leqslant C$$

对 $M=\pm\frac{1}{\xi_2}$ 或 $\pm N$ 一致成立。

项 III 和项 II 是对称的，因此类似的过程我们也能得到 $\mathrm{III}\leqslant C$。对于项 IV 只需对变量 x_1 和 x_2 均进行分部积分，过程跟上面类似，这里省略。这样我们就证明了算子 T_ε^N 是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 有界的。

2.2 第二步，对紧支集光滑函数 f，证明 $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} T_\varepsilon^N f(x)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 意义下收敛 $(1<p<\infty)$

假定 f 是紧支集光滑函数，那么

$$\bar{K}_\varepsilon^N * f(x)=\int_{\mathbf{R}^2}K_\varepsilon^N(y_1,y_2)f(x_1-y_1,x_2-y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2=$$
$$\left(\int_{\substack{\varepsilon<|y_1|<1\\ \varepsilon<|y_2|<1}}+\int_{\substack{1<|y_1|<N\\ \text{or}\ \ 1<|y_2|<N}}\right)K(y_1,y_2)f(x_1-y_1,x_2-y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2:=$$
$$\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

对于项 I，利用核 K 的条件，有

$$|I|\leqslant F(x)\cdot$$
$$\left(\left|\int_{\substack{\varepsilon<|y_1|<1\\ \varepsilon<|y_2|<1}}K(y_1,y_2)(f(x_1-y_1,x_2-y_2)-f(x_1,x_2))\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|+\right.$$
$$\left.\left|\int_{\substack{\varepsilon<|y_1|<1\\ \varepsilon<|y_2|<1}}K(y_1,y_2)f(x_1,x_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|\right)\leqslant CF(x)$$

其中 $F(x)$ 为紧支集特征函数。

对于项 II，我们对积分项用绝对值估计，有

$$|\mathrm{II}|\leqslant\int_{\substack{|y_1|>1\\ \text{or}\ \ |y_2|>1}}\frac{1}{|y_1|}\frac{1}{|y_2|}\left(\frac{|y_1|}{|y_2|}+\frac{|y_2|}{|y_1|}\right)^{-\delta}\cdot$$
$$\frac{1}{(1+|x_1-y_1|)^2}\frac{1}{(1+|x_2-y_2|)^2}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2$$

而该函数属于 $L^p(\mathbf{R}^2)$。利用控制收敛定理，我们就得到需要的结论。

2.3 第三步，证明算子 T 是 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 有界的 $(1<p<\infty)$

根据第二步，对任意的具有紧支集光滑函数 $f(x)$，$\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} T_\varepsilon^N f(x)$ 在 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 意义下收敛，因此算

子 $Tf(x)=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} T_\varepsilon^N f(x)$ 的定义是有意义的，下面我们将证明其 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 有界性。

首先我们回忆经典的单参数 Littlewood-Paley-Stein 理论[8]，假定函数 $\psi(x)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上支于单位球的光滑函数，并且满足：$\sum\limits_{j\in\mathbf{Z}}|\psi(2^{-j}\xi)|^2=1$，对任意的 $\xi\in\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ 成立，并且 $\int_{\mathbf{R}^2}\psi(x)\mathrm{d}x=0$。那么 g 函数定义为：$g(f)(x)=\left(\sum\limits_{j\in\mathbf{Z}}|\psi_j*f(x)|^2\right)^{1/2}$，其中 $\psi_j(x)=2^{2j}\psi(2^jx_1,2^jx_2)$。

众所周知，$g(f)$ 与函数 f 是 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 互相控制的，即存在常数 C_1,C_2，使得

$$C_1\|f\|_p\leqslant\|g(f)\|_p\leqslant C_2\|f\|_p$$

为证明算子 T 的 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 有界性，首先我们需要证明下面的引理：

引理 1　假定 $0<\lambda\leqslant\min(\delta,1-\delta)$，那么 $|K*\psi(x)|\leqslant\dfrac{C_\lambda}{1+|x_1|^{1+\lambda}}\dfrac{1}{1+|x_2|^{1+\lambda}}$，对任意的 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ 成立。

证明 分三种情况讨论：(a) $|x_1|\geqslant 2,|x_2|\geqslant 2$；(b) $|x_1|\geqslant 2,|x_2|<2$ 或者 $|x_1|<2,|x_2|\geqslant 2$；(c) $|x_1|<2,|x_2|<2$。

对于情形（a）：$|x_1|\geqslant 2$ 和 $|x_2|\geqslant 2$，利用函数 ψ 的消失矩条件，有

$$
\begin{aligned}
&|K*\psi(x)|=\\
&\left|\int_{\mathbf{R}^2}(K(x_1-y_1,x_2-y_2)-K(x_1,x_2))\psi(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|\leqslant\\
&C\left|\int_{\mathbf{R}^2}\left(\frac{1}{|x_1|^2}\frac{1}{|x_2|}+\frac{1}{|x_1|}\frac{1}{|x_2|^2}\right)\cdot\right.\\
&\left.\left(\frac{|x_1|}{|x_2|}+\frac{|x_2|}{|x_1|}\right)^{-\delta}|\psi(y_1,y_2)|\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|\leqslant\\
&\frac{C_\lambda}{1+|x_1|^{1+\lambda}}\frac{1}{1+|x_2|^{1+\lambda}}
\end{aligned}
$$

对于情形（b）：$|x_1|\geqslant 2,|x_2|<2$ 或者 $|x_1|<2,|x_2|\geqslant 2$，我们有

$$
\begin{aligned}
&|K*\psi(x)|=\\
&\left|\int_{\substack{|y_1|<1\\|y_2|<1}}\frac{1}{|x_1-y_1|}\frac{1}{|x_2-y_2|}\cdot\right.\\
&\left.\left(\frac{|x_1-y_1|}{|x_2-y_2|}+\frac{|x_2-y_2|}{|x_1-y_2|}\right)^{-\delta}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|\leqslant\\
&\frac{C_\lambda}{1+|x_1|^{1+\lambda}}\frac{1}{1+|x_2|^{1+\lambda}}
\end{aligned}
$$

对于情形（c）：$|x_1|<2,|x_2|<2$，利用核 K 的消失矩条件，有

$$
\begin{aligned}
&|K*\psi(x)|=\\
&\left|\int_{\substack{|y_1|<1\\|y_2|<1}}K(y_1,y_2)(\psi(x_1-y_1,x_2-y_2)-\right.\\
&\left.\psi(x_1,x_2))\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|+\\
&\left|\int_{\substack{|y_1|<1\\|y_2|<1}}K(y_1,y_2)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\psi(x_1,x_2)\right|\leqslant\\
&C\left|\int_{\substack{|y_1|<1\\|y_2|<1}}\frac{1}{|y_1|}\frac{1}{|y_2|}\left(\frac{|y_1|}{|y_2|}+\frac{|y_2|}{|y_1|}\right)^{-\delta}\cdot\right.\\
&\left.(|y_1|+|y_2|)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\right|+C\leqslant\\
&\frac{C_\lambda}{1+|x_1|^{1+\lambda}}\frac{1}{1+|x_2|^{1+\lambda}}
\end{aligned}
$$

这样我们就完成了引理 1 的证明。

根据引理 1 得到的结论，我们又可以得到如下的引理：

引理 2　假定 $0<\lambda\leqslant\min(\delta,1-\delta)$，$j,j'\in\mathbf{Z}$，那么有

$$|\psi_j*K*\psi_{j'}(x)|\leqslant C_\lambda 2^{-|j-j'|}2^{-|k-k'|}\frac{2^{\min(j,j')}}{(1+2^{\min(j,j')}|x_1|)^{1+\lambda}}\cdot$$

$$\frac{2^{\min(k,k')}}{(1+2^{\min(k,k')}|x_2|)^{1+\lambda}}$$，对任意的 $x\in\mathbf{R}^2$ 成立。

引理 2 的证明是规范的，它需要利用下面两个事实：(a) 卷积算子的交换性，即 $\psi_j*K*\psi_{j'}(x)=K*(\psi_j*\psi_{j'})(x)$；(b) $\psi_j*\psi_{j'}(x)$ 满足引理 1 证明中函数 $\psi(x)$ 需要用到的条件。证明过程这里省略。

根据引理 2 得到的结论，对 $j,j'\in\mathbf{Z}$，有

$$|\psi_j*K*\psi_{j'}*(\psi_{j'}*f)(x)|\leqslant C2^{-|j-j'|}M_s(\psi_{j'}*f)(x)$$

其中 $M_sf(x)$ 为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的强极大函数。

利用著名的 Calderon 表示定理[8]，即 $f(x)=\sum\limits_{j\in\mathbf{Z}}\psi_j*\psi_j*f(x)$，在 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 意义下成立，然后利用 Littlewood-Paley-Stein 理论，有

$$
\begin{aligned}
&\|T(f)\|_p\leqslant C\|g(Tf)\|_p=\\
&C\left\|\left(\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\psi_j*K*f(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leqslant\\
&C\left\|\left(\sum_{j'\in\mathbf{Z}}|M_s(\psi_{j'}*f)(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leqslant\\
&C\left\|\left(\sum_{j'\in\mathbf{Z}}|\psi_{j'}*f(x)|^2\right)^{1/2}\right\|_p\leqslant C\|f\|_p
\end{aligned}
$$

对任意的紧支集光滑函数 $f(x)$ 均成立。

最后利用紧支集光滑函数在 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 空间上是稠密的性质，我们就可以把算子 T 延拓为 $L^p(\mathbf{R}^2)$ 上的有界线性算子，这样就完成了定理 1 的证明。

3　结　论

本文建立了一套介于单参数经典型与多参数乘积型间的奇异积分算子理论，证明其 L^p 有界性 $(1<p<\infty)$。我们的证明过程主要利用了傅里

叶变换、分部积分、Calderon 表示定理和 Littlewood-Paley-Stein 理论等方法。我们所建立的奇异积分算子理论，完善和丰富了奇异积分算子理论体系，预期对奇异积分算子的研究将产生重要影响。

参考文献：

[1] CALDERÓN A P, ZYGMUND A. On the existence of certain singular integrals [J]. Acta Math, 1952, 88(1): 85－139.

[2] CALDERÓN A P, ZYGMUND A. On singular integrals [J]. Amer J Math, 1956, 78: 289－309.

[3] STEIN E M. Note on singular integrals [J]. Proc Amer Math Soc, 1957, 8: 250－254.

[4] ZYGMUND A. On singular integrals [J]. Rend Mate Appl, 1957, 16: 468－505.

[5] FEFFERMAN R, STEIN E M. Singular integrals on product spaces [J]. Adv Math, 1982, 45(2): 117－143.

[6] JOURNE J L. Calderon-Zygmund operators on product spaces [J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985, 1: 55－92.

[7] RICCI F, STEIN E M. Multiparameter singular integrals and maximal functions [J]. Ann Inst Fourier (Grenoble), 1992, 42: 637－670.

[8] STEIN E M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals [M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.

(上接第 57 页)

参考文献：

[1] 马克杰. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991.

[2] CHENG H, YAO B, CHEN X, et al. On graceful generalized spiders and caterpillars [J]. Ars Combin, 2008, 87:181－191.

[3] YANG Y S, RONG Q, XU X R. A class of graceful graphs [J]. Math Research and Exposition, 2004, 24: 520－524.

[4] YANG Y, XU X, XI Y, et al. The graphs $C_9^{(t)}$ are graceful for $t\equiv 0,1 \pmod 4$ [J]. Ars Combin, 2006, 79:295－301.

[5] YANG Y, XU X, XI Y, et al. The graphs $C_7^{(t)}$ are graceful for $t\equiv 0,3 \pmod 4$ [J]. Ars Combin, 2007, 85:361－368.

[6] YOUSSEF M Z. On Skolem-graceful and cordial graphs [J]. Ars Combin, 2006, 78:167－177.

[7] 刘家保,潘向峰. 轮形图和扇型图的优美性[J]. 安徽大学学报:自然科学版,2009, 33(4):11－13.

[8] 刘瑞芹,张昆龙. 非连通并图的优美标号研究[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2009, 32(6):940－944.

[9] 魏丽侠, 贾治中. 非连通图 $G_1\cup G_2$ 及 $G_1\cup G_2\cup K_2$ 的优美性[J]. 应用数学学报,2005, 28(4):689－694.

[10] 蔡华,魏丽侠,吕显瑞. 非连通图 $(P_1\vee P_n)\cup G_r$ 和 $(P_1\vee P_n)\cup(P_3\vee\overline{K_r})$ 及 $W_n\cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉林大学学报:理学版,2007, 7(4):540－543.

[11] 王 涛,刘海生,李德明. 和轮相关图的优美性[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2011, 50(6):16－19.

[12] 潘 伟,路 线. 两类非连通图 $(P_2\vee\overline{K_n})\cup St(m)$ 及 $(P_2\vee\overline{K_n})\cup T_n$ 的优美性 [J]. 吉林大学学报:理学版,2003, 41(2):152－154.